Hertentamen Functionaalanalyse, 2006–2007

Datum : 20-08-2007, 09.00–12.00 uur.

Het tentamen is open boek; u mag al uw boeken en aantekeningen gebruiken. U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt.
Blijf niet eindeloos aan een onderdeel werken. Indien u een onderdeel niet kunt, ga dan gewoon verder en gebruik het resultaat (indien mogelijk).

1. Zij E een inproduktruimte. Bewijs dat als $x, y \in E$ met $\| x \|=\| y \|= 1$ dat dan de lijn tussen x en y niet in de eenheidsbol $\{z \in E \ ||| \ z \|= 1\}$ ligt. (Dus de eenheidsbol in E bevat geen lijsegmenten.)
   (**Aanwijzing**: bewijs met behulp van de parallellogramidentiteit dat het tussenliggende punt $\frac{1}{2}(x + y)$ niet in E ligt.)

2. Beschouw de volgende operator A op $L^2([0, 1])$:

   $Af(x) = xf(x), \quad f \in L^2([0, 1])$

   (a) Toon aan dat A een begrensde lineaire operator is.
   (b) Toon aan dat A geen eigenwaarden heeft.
   (c) Toon aan dat het spectrum van A gelijk is aan $[0, 1]$.
   (d) Definieer voor $0 \neq c \in \mathbb{R}$ de operator A_c op $L^2([0, 1])$ door

   $A_c f(x) = xf(x) - c, \quad f \in L^2([0, 1])$

   Bepaal de eigenwaarden van A_c.

3. Laat H een Hilbertruimte. Zij $\phi, \psi \in H$, en definieer de operator $T : H \to H$ door

   $Tx = (x, \phi)\psi, \quad x \in H$

   Bewijs dat

   (a) $T \in \mathcal{B}(H)$
   (b) $\| T \|=\| \phi \|\| \psi \|$
   (c) $T^2 = (\phi, \psi)T$
   (d) Als $\| \phi \|\| \psi \|< 1$, dan is $I - T$ inverteerbaar.
   (e) Als $(\phi, \psi) \neq 1$, dan is $I - T$ inverteerbaar.

4. Zij K_1 en K_2 twee deelruimten van een Hilbertruimte H. Toon aan dat

   $(K_1 + K_2)^{\perp} = K_1^{\perp} + K_2^{\perp}$

Puntenverdeling:

1. 15.
2. a: 10, b: 5, c: 5, d: 10.
3. a: 5, b: 10, c: 5, d: 5, e: 5
4. 15.

   Gratis: 10, Totaal: 100